• ΘΕΜΑ V σελ. 71 (αλυτες)

$xy''' - y'' - xy' + y = 0 \quad (0)$

$y_1(x) = x$ και $y_2(x) = e^x, \ \forall x > 0$

ΛΥΣΗ

$y = y_1 u = x \cdot u$ και μετα $u' = z$

μετά από πράξεις φθάνουμε

$x^2 z'' + 2xz' - (2 + x^2) z = 0 \quad (1)$

Αν ξερουμε $\{z_1, z_2\}$ ΒΣΛ της (1)

τοτε το $\{y_1, y_1 \int z_1, y_1 \int z_2\}$ ΒΣΛ της (0)

Τοτε $y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1 + c_3 y_1 \int z_2$

$\frac{y_2}{y_1} = c_1 + c_2 \int z_1 + c_3 \int z_2$

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = c_1 + c_2 z_1 + c_3 z_2$ άρα η $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$ λύση της (E_2°)

και υποβιβάζω την (1) σε μια α' τάξης

ΘΕΜΑ 5 (ΠΡΟΟΔΟΣ ΟΜΑΔΑ A)

Εστω η (Ε):

$y'' + y = b(x)$ με ΒΣΛ $\{\sin x, \cos x\}$ της (E_0)

οπου (E_0) η αντιστοιχη ομογενής και $y_M(1) = 0$, $y_M'(1) = 0$

ΛΥΣΗ

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ 1 & -\sin x \end{vmatrix} = -\cos x \ , \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} = \sin x$$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_1^x \frac{-\cos s}{-1} b(s)\,ds + y_2(x)\int_1^x \frac{\sin s}{-1} b(s)\,ds =$$

$$= \int_1^x (\sin x \cos x - \cos x \sin x)\, b(s)\,ds =$$

$$= \int_1^x \sin(x-s)\, b(s)\,ds$$

Άρα, $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \int_1^x \sin(x-s)\, b(s)\,ds$

και $y_\mu(1)=0$ και $y_\mu'(1)=0$ και βρίσκουμε τα C_1 και $C_2 \in \mathbb{R}$.

B-29) $\sum_{k=0}^{5} y^{(k)} = 0$

i) ΒΣΛ

ii) Το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων οι οποίες τείνουν στο 0 για $x \to \infty$ είναι ένας διαν. χώρος επί του $\mathbb{R}$ {βάση}

ΛΥΣΗ

i) $y^{(5)} + y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = 0$

άρα Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^3(\lambda^2+\lambda+1) + \lambda^2+\lambda+1 = 0$$

$$(\lambda^3+1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0$$

$\lambda^3+1 = 0$ ή $\lambda^2+\lambda+1 = 0$ $\quad \Delta = 1-4 = -3 < 0$

$(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\to \lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\lambda = -1$ ή $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$\Delta = 1-4 = -3 < 0$, $\lambda_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ $\to \lambda_4 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$$y_2 = e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Άρα, ΒΣΛ είναι το

$$\left\{ e^{-x},\ e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$$

Αυτές είναι οι πραγματικές λύσεις

Έστω $S: \{ x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \}$
αν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ και $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$, $x_1, x_2 \in S$
τότε η x λύση και μετά $\lim_{x\to\infty} x(t) =$
$= c_1 \lim_{x\to\infty} x_1(t) + c_2 \cdot \lim_{x\to\infty} x_2(t) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$

$\rightsquigarrow x \in S$ άρα S γραμμ. χώρος

Το σύνολο $S_1 = \{ e^{-x}, e^{-\frac{1}{2}x} \cos x, e^{-\frac{1}{2}x} \sin x \}$ είναι μια βάση (με απόδειξη)

- **Αναφορά:**

$z^v = z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$
$z^v = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$
$z^v = |z_0| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$
$z_k = \sqrt[v]{|z_0|} \cdot \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{v} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{v}\right)$ $k = 0, 1, \ldots, v-1$

Ασκ. 5 σελ 113)

$$y'' + 10y' + 25y = \frac{e^{-5x} \log x}{x^2}, \quad x > 0$$

ΛΥΣΗ

Βρίσκω το Χ.Π. της ομογενούς

$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda = -5$, διπλή

άρα ΒΣΛ $\{ e^{-5x}, x \cdot e^{-5x} \}$

Και κάνω με χρήση του θεωρ. μεταβολής σταθερών

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0 \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' = \frac{e^{-5x} \log x}{x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-5x} v_1' + e^{-5x} x \cdot v_2' = 0 \\ -5 \cdot e^{-5x} v_1' + (e^{-5x} - 5x e^{-5x}) v_2' = \frac{e^{-5x}}{x^2} \cdot \log x \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 + x V_2' = 0 \\ -5V_1' + (1-5x)V_2' = \dfrac{\log x}{x^2} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} V_2' = \dfrac{\log x}{x^2} \\ V_2(x) = \displaystyle\int_1^x \dfrac{\log s}{s^2}\, ds \end{array}$$

Και έτσι $\boxed{y_\mu(x) = y_1 V_1 + y_2 V_2}$